УДК 519.2

Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для линейных процессов со значениями в банаховом пространстве[1]

Т.М.Зупаров[2]

[2] Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, г. Ташкент, Узбекистан.
(+99871)246-39-25; Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, Национальный Университет Узбекистана, кафедра "Теория вероятностей и математическая статистика".

Аннотация. *В статье получена неравномерная оценка порядка $O\left(N^{-1/6}\right)$ скорости сходимости в центральной предельной теореме (ц.п.т.) для линейных процессов в сепарабельном вещественном банаховом пространстве B с гладкой нормой на множествах, удовлетворяющих некоторым условиям обеспечивающим гладкость границы.*
Ключевые слова: *центральная предельная теорема, банахово пространство, линейный процесс, ковариационный оператор, гауссовское распределение, неравномерное оценка.*

1. Введение

В работе [12] доказана ц.п.т. для линейных процессов в банаховом пространстве, имеющий тип 2 (определение см.[16] стр. 137). В случае конечномерного евклидова пространства оценка порядка $O\left(N^{-1/2}\right)$ в ц.п.т. для линейных процессов получена в [2]. Асимптотическая нормальность нормированной суммы линейного процесса, порожденного независимыми и слабо зависимыми последовательностями случайных величин и оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме, получены в работах [13] и [14]. В работе [15] получена оценка в центральной предельной теореме для линейных процессов со значениями в гильбертовом пространстве.

Пусть $\{\xi_k, k \in Z\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в действительном банаховом

[1]Работа поддержана грантом ГКНТ Рес. Узбекистан (Ф4-01)

пространстве $(B, \|\cdot\|)$ (сокращенно B-з.с.в.), с ковариационными операторами $T_i = T$, $\{d_k, k \in Z\}$ – последовательность операторов из $L(B)$, для $d_k \in L(B)$ норма $\|d_k\|$ – операторная норма.

Последовательность B-з.с.в. $\{X_k, k \in Z\}$, где

$$X_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_i \xi_{k-i} \tag{1}$$

называется линейным процессом. Для $N \geq 1$ положим $S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$.

Условие

$$d = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|d_k\| < \infty \tag{2}$$

обеспечивает сходимость с вероятностью 1 ряда (1).

Всюду в дальнейщем через $C(\cdot,\cdot), C_i(\cdot,\cdot)$ обозначим положительные постоянные, зависящие только от величин, указанных в скобках.

Предположим, что B принадлежит классу D_3. Класс $D_k, k = 1, 2, 3, ...$ определяется следующим образом: $B \in D_k$, если отображение $\phi : B \backslash \{0\} \to R^1, \phi(x) = \|x\|$, k раз дифференцируемо (дифференцирование понимается в смысле Фреше: $D^{(i)}f(a)$ обозначает i-ю производную f в точке a, а $D^{(i)}f(a)(x_1, ..., x_i)$– соответствующую полулинейную форму: подробней об этом см. [1]) и имеют место оценки

$$\left\| D^{(i)}\phi(x) \right\| \leq C_0(i, B)\|x\|^{1-i}, \;\; i = 1, 2, 3, ...; \;\; \|x\| \neq 0. \tag{3}$$

Хорошо известно, что l_p и $L_p(0,1) \in D_3$, если $3 \leq p < \infty$. Также известно, что класс D_3 является подклассом банаховых пространств типа 2. В работе [3] показано, что если $B \in D_3$, то и $l_p(B) \in D_3$, при $3 \leq p < \infty$, где $l_p(B) = \left\{ x : x = (x_1, x_2, ...), x_i \in B; \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p < \infty, p \geq 1 \right\}$ –сепарабельное банахово пространство с нормой

$$\|x\|_{l_p(B)} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p \right)^{1/p}.$$

Через $\mu_{0,T}$ обозначим гауссовское распределение на B с нулевым средним и ковариационным оператором T. Существование такого гауссовского распределения обеспечивается тем фактом, что B – пространство типа 2 (см. [4]).

В данной работе изучается оценка величины

$$\Delta_N(A) = \left| F_N(A) - \mu_{0,dTd^*}(A) \right|,$$

где $d = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$, $F_N(A) = P\left(N^{-1/2}\sum\limits_{i=1}^{N} X_i \in A\right)$, а $A-$некоторое множество из борелевской σ-алгебры $\Im(B)$.

В работе [5] В.И.Паулаускасом рассматривались множества A с гладкой границей. Пусть $A \in \Im(B)$ удовлетворяет следующим условиям:

(A1) множество A связное, $0 \in A$ и каждый луч tx, $t > 0$, $\|x\| = 1$ пересекает границу ∂A множество A в одной точке;

(A2) функционал $d_A(x) = \sup\left\{t > 0; t\frac{x}{\|x\|} \in A\right\}$ является трижды дифференцируемым для всех $x \neq 0$ и

$$\left\|D^{(i)}d_A(x)\right\| \leq M_i\|x\|^{-i}, i = 1, 2, 3,$$

$$\inf_{\|x\|=1} d_A(x) = m_1 > 0, \tag{4}$$

$$\sup_{\|x\|=1} d_A(x) = m_2 < \infty; \tag{5}$$

(A3) для любого распределения F с нулевым средним, сильным вторым моментом и ковариационным оператором T

$$\int\limits_B D^{(2)}d_A(x)(y)^2(F - \mu_{0,T})(dy) = 0, \forall x \in B, x \neq 0.$$

Будем говорить, что множества A и гауссовская мера $\mu_{0,T}$ удовлетворяет условию (A4), если существует константа $C(B, T, A)$ и числа $\beta \geq 0$ и $\gamma > 0$ такие, что для всех $\varepsilon > 0$

$$\mu_{0,T}\left((\partial\left(A(r, a)\right))_{\varepsilon}\right) \leq C(B, T, A)\left(1 + \|a\|^{\beta}\right)\varepsilon, \tag{6}$$

где $A(r, a) = Ar + a$, $(\partial A)_{\varepsilon} = \delta(A, \varepsilon) \cup \delta(A, -\varepsilon)$, $\delta(A, \varepsilon) = A_{\varepsilon}\backslash A$, $\delta(A, -\varepsilon) = A\backslash A_{-\varepsilon}$, $A_{\varepsilon} = \{x \in B; \|x - y\| < \varepsilon, y \in A\}$, $A_{-\varepsilon} = ((A^c)_{\varepsilon})^c, A^c = B\backslash A$ и $C(B, T, A)$ имеет свойство

$$C(B, \alpha T, A) \leq \alpha^{-\gamma}C(B, T, A) \tag{7}$$

для всех $0 < \alpha \leq 1$.

Известно (см. [1]), что шары (т.е. $A = V_1 = \{x \in H; \|x\| < 1\}$) в сепарабельном гильбертовом пространстве H удовлетворяет условиям (A1) – (A4), а в случае $B = l_p$, $1 \leq p < \infty$ оценки типа (6) были получены в работах [1], [6], [7]. В работе [3] получены обобщения и уточнения этих результатов, в частности, в этой работе показано, что для шаров в пространстве $l_p, 1 \leq p < \infty$ показатель β в (6) равен $p - 1$ и, что этот показатель неулучшаем.

Для множества A определим $R(A) = \inf\limits_{x \in \partial A} \|x\|$ и $R(r,a) = R(A(r,a))$.

Будем говорить, что множества A и гауссовская мера $\mu_{0,T}$ удовлетворяет условию (A5), если существует константа $C_1(B,T,A)$ и числа $\beta_1 \geq 0$ и $\gamma_1 > 0$ такие, что для всех $\varepsilon > 0$

$$\left(1 + R^3(r,a)\right) \mu_{0,T}(\partial\left(A(r,a)\right))_\varepsilon \left(1 + \|a\|^{\beta_1}\right) C_1(B,T,A)\varepsilon \tag{8}$$

и константа $C_1(B,T,A)$ обладает свойством (7).

В работе [8] была доказана следующая теорема, обобщающая теорему из [7], где рассматривался случай $A = V_1$.

Теорема 1 (см. [3]). *Пусть $B \in D_3$, $\xi_i, i = 1, 2, ...-$ независимые одинаково распределенные (н.о.р.) $B-$ з.с.в. с распределением $F, E\xi_i = 0, E\|\xi_i\|^3 < \infty$ и ковариационным оператором T. Пусть A таково, что выполнены условия (A1) - (A4) с $\beta \leq 3$. Тогда*

$$\sup_{r \geq 0} \left|\left(Q_N - \mu_{0,T}\right)\left(A(r,a)\right)\right| \leq C(B,T,A,\gamma)\left(1 + \|a\|^\beta\right) N^{-1/6} \nu_3^{\frac{1}{3}(1-\delta_N)}, \tag{9}$$

где $Q_N(A) = P\left(N^{-1/2}\sum\limits_{i=1}^{N}\xi_i \in A\right)$, $\delta_N = \begin{cases} 4^{-N}, N = 1,2,3,4; \\ 4^{-2-k}, 2^k \leq N < 2^{k+1}, k \geq 2. \end{cases}$

В работе [9] теорема 2 из [7] была обобщена в другом направлении – для разно распределенных слагаемых и шара V_1в качестве A. В этой работе было снято ограничение, на β, что важно с вышеупомянутом фактом, что в пространстве $l_p, 1 \leq p < \infty$ $\beta = p - 1$.

В работе [3] (теорема3) получена неравномерная оценка в случае разно распределенных слагаемых, обобщающая соответствующие результаты работ [10] и [11]. Сформулируем следствие 1 из этой работы обобщающее оценку (9).

Следствие 1. *Пусть $B \in D_3$, $\xi_i, i = 1, 2, ...-$ независимые одинаково распределенные B-з.с.в. с распределением $F, E\xi_i = 0, E\|\xi_i\|^3 < \infty$ и ковариационным оператором T. Если выполнены условия (A1) - (A3) и (A5) для $\mu_{0,T}$, то*

$$\left|\left(Q_N - \mu_{0,T}\right)\left(A(r,a)\right)\right| \leq C(B,\beta_1)\left(1 + \|a\|^{\beta_1}\right)\left(1 + \nu_3/\sqrt{N}\right) \times$$

$$\times \left(1 + R^3(r,a)\right)^{-1} \max\left\{\frac{\nu_3^{\left(1-\frac{1}{4^N}\right)/3}}{N^{1/6}}; \frac{\nu_3}{\sqrt{N}}\right\},$$

где псевдомомент ν_3 определяется формулой $\nu_3 = \int\limits_B \|x\|^3 |F - \mu_{0,N}|(dx)$.

Теперь сформулируем наш основной результат:

Теорема 2. *Пусть* $B \in D_3$, $\xi_i, i = 1, 2, ...-$ *независимые одинаково распределенные* B*-з.с.в. с распределением* $F, E\xi_i = 0, E\|\xi_i\|^3 < \infty$ *и ковариационным оператором* T. *Если выполнены условия (A1) - (A3) и (A5) для* μ_{0,dTd^*} *и*

$$g = \sum_{k \in Z} |k| \, \|d_k\| + \|d_0\| < \infty, \; d \neq 0$$

то

$$\Delta_N(r, A) = |F_N(A) - \mu_{0,dTd^*}(A)| \leq C(B, d, T, \beta, A) \times$$

$$\times \max \left\{ \frac{\left(1 + \|a\|^{\beta_1}\right)^{3/4} g^{3/4} E\|\xi_1\|^{3/4}}{(1 + R^3(r, a))^{3/4} m_1^{3/4} m_2^{1/4} N^{3/8}}; \frac{\left(1 + \|a\|^{\beta_1}\right) E\|\xi_1\|^3}{(1 + R^3(r, a)) N^{1/6}} \right\}.$$

2. Некоторые вспомогательные леммы

В этом разделе приводятся леммы, необходимые для доказательства основной теоремы.

Лемма 1. *Справедливы равенства:*

$$X_n = d\xi_n + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \xi_{n-j} - \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \xi_{n-j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} (e_j - e_{j-1}) \, \xi_{n+j}, \qquad (10)$$

$$S_N = X_1 + X_2 + ... + X_N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{kN} \xi_k, \qquad (11)$$

$$\frac{S_N}{\sqrt{N}} = \frac{d \sum\limits_{j=1}^{N} \xi_j}{\sqrt{N}} + \frac{e_0 \left(\xi_{N+1} - \xi_1\right)}{\sqrt{N}} + \frac{\eta_1 - \eta_{N+1}}{\sqrt{N}} + \frac{\zeta_{N+1} - \zeta_1}{\sqrt{N}}, \qquad (12)$$

где $\gamma_j = \sum\limits_{k=j}^{\infty} d_k$, $e_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_{-k}$, $e_j = \sum\limits_{k=j+1}^{\infty} d_{-k}, j = 1, 2, 3, ...,$ $b_{kN} = \sum\limits_{i=1}^{N} a_{i-k}$, $\eta_n = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \gamma_j \xi_{n-j}$, $\zeta_n = \sum\limits_{j=1}^{\infty} e_j \xi_{n+j}$.

Лемма 1 доказывается сравнением коэффициентов при ξ_k.

Лемма 2. *Пусть* X *и* $Y-$ $B-$*з.с.в. и для* $A \in \Im(B)$ *выполнены условия (A2) – (A5). Тогда для любого* $\varepsilon > 0$

$$|P\left(X + Y \in A(r, a)\right) - \mu_{0,T}\left(A(r, a)\right)| \leq$$

$$\leq |P\left(X \in A(r + \varepsilon, a)\right) - \mu_{0,T}\left(A(r + \varepsilon, a)\right| +$$

$$+\left|P\left(X \in A(r-\varepsilon, a)-\mu_{0,T}\left(A(r-\varepsilon, a)\right)\right|+\right.$$

$$+P\left(\|Y\| \geq \varepsilon m_1\right)+2m_2C_1(B,T,A)\left(1+\|a\|^{\beta}\right)\left(1+R^3(a,r)\right)^{-1}\varepsilon.$$

Доказательство. Согласно (4) и определения $d_A(x)$

$$\inf_{x\in\partial A}\|xr-x(r\pm\varepsilon)\|=\varepsilon\inf_{\|x\|=1}d_A(x)\geq\varepsilon m_1.$$

Отсюда следуют следующие включения событий:

$$\{X+Y\in A(r,a)\}\subset\{X\in A(r+\varepsilon,a)\}\cup\{\|Y\|\geq\varepsilon m_1\},$$

$$\{X+Y\in A(r,a)\}\supset\{X\in A(r-\varepsilon,a)\}\setminus\{\|Y\|\geq\varepsilon m_1\}.$$

Поэтому

$$P(X\in A(r-\varepsilon,a))-P\left(\|Y\|\geq\varepsilon m_1\right)\leq P\left(X+Y\in A(r,a)\right)\leq$$

$$\leq P\left(X\in A(r+\varepsilon,a)\right)+P\left(\|Y\|\geq\varepsilon m_1\right). \tag{13}$$

Если $\Delta=P\left(X+Y\in A(r,a)\right)-\mu_{0,T}(A(r,a))\geq 0$, то

$$|\Delta|\leq\left|P\left(X\in A(r+\varepsilon,a)\right)-\mu_{0,T}\left(A(r+\varepsilon,a)\right)\right|+P\left(\|Y\|\geq\varepsilon m_1\right)+$$

$$+\left|\mu_{0,T}\left(A(r+\varepsilon,a)\right)-\mu_{0,T}\left(A(r,a)\right)\right|.$$

Аналогично, если $\Delta<0$, то вычитая из левой части неравенства (13) $\mu_{0,T}\left(A(r,a)\right)$, получим, что

$$|\Delta|\leq\left|P\left(X\in A(r-\varepsilon,a)\right)-\mu_{0,T}\left(A(r-\varepsilon,a)\right)\right|+P\left(\|Y\|\geq\varepsilon m_1\right)+$$

$$+\left|\mu_{0,T}\left(A(r-\varepsilon,a)\right)-\mu_{0,T}\left(A(r.a)\right)\right|.$$

Из полученных неравенств, следует, что

$$|\Delta|\leq\max\left\{\left|P\left(X\in A(r+\varepsilon,a)\right)-\mu_{0,T}\left(A(r+\varepsilon,a)\right)\right|,\right.$$

$$\left.\left|P\left(X\in A(r-\varepsilon)\right)-\mu_{0,T}\left(A(r-\varepsilon,a)\right)\right|\right\}+P\left(\|Y\|\geq\varepsilon m_1\right)+$$

$$+\max\left\{\left|\mu_{0,T}\left(A(r+\varepsilon,a)\right)-\mu_{0,T}\left(A(r,a)\right)\right|,\right.$$

$$\left.\left|\mu_{0,T}\left(A(r-\varepsilon,a)\right)-\mu_{0,T}\left(A(r,a)\right)\right|\right\}. \tag{14}$$

Согласно (5)

$$\sup_{x\in\partial A}\|xr-x(r\pm\varepsilon)\|=\sup_{\|x\|=1}\left|d_{Ar}(x)-d_{A(r\pm\varepsilon)}(x)\right|=m_2\varepsilon$$

и, следовательно

$$A(r,a)\backslash A(r-\varepsilon,a)\subset\left(\partial\left(A(r,a)\right)\right)^{2m_2\varepsilon},$$

$$A(r+\varepsilon,a)\backslash A(r,a)\subset\left(\partial\left(A(r,a)\right)\right)^{2m_2\varepsilon}.$$

Отсюда, в силу условия (8),

$$|\mu_{0,T}\left(A(r\pm\varepsilon)\right)-\mu_{0,T}\left(A(r,\varepsilon)\right)|\leq\mu_{0,T}\left(\left(\partial\left(A(r,a)\right)\right)^{2\varepsilon m_2}\right)\leq$$

$$\leq 2\big(1+R^3(r,a)\big)^{-1}\left(1+\|a\|^{\beta_1}\right)C_1(B,T,A)m_2\varepsilon.$$

Наконец, воспользовавшись неравенством (14), завершим доказательство леммы.

Пусть $\xi_k,\ k\in Z-$ последовательность B - з.с.в., $\{b_{kN},k\in Z\}$ – последовательность операторов из $L(B),N\geq 1$. Положим

$$\zeta_N=\sum_{k\in Z}b_{kN}\xi_k. \tag{15}$$

Лемма 3. *Пусть B является пространством типа 2, $E\xi_k=0,\rho_{kt}=E\|\xi_k\|^t<\infty$ для $k\in Z$ и ряд (15) сходится с вероятностью 1. Тогда*

$$E\|\zeta_N\|^t\leq C(B,t)\left\{\sum_{k\in Z}\|b_{kN}\|^t\rho_{kt}+\left(\sum_{k\in Z}\|b_{kN}\|^2\rho_{k2}\right)^{t/2}\right\},$$

где $C(B,t)-$положительная постоянная, зависящая только от $B,\ t\geq 2$.

Доказательство. Доказательство этой леммы опирается на следующее неравенство Розенталя для независимых B-з.с.в., доказанное И.Ф.Пинелис (см. [17]):

Пусть пространство B имеет тип 2 и $\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$ – независимые B-з.с.в.$E\eta_i=0,\ E\|\eta_i\|^t<\infty$. Тогда существует такое положительное число $C(B,t)$, зависящее только от B, и $t\geq 1$, что

$$E\left\|\sum_{i=1}^n\eta_i\right\|^t\leq C(B,t)\max\left\{\sum_{i=1}^n E\|\eta_i\|^t,\left(E\left\|\sum_{i=1}^n\eta_i\right\|\right)^t\right\}. \tag{16}$$

Заметим, что если пространство B является пространством типа 2 и $E\eta_i=0$ для $i=1,2,...,n$, то

$$\left(E\left\|\sum_{i=1}^n\eta_i\right\|\right)^t\leq\left(E\left\|\sum_{i=1}^n\eta_i\right\|^2\right)^{t/2}\leq\left(C(B)\sum_{i=1}^n E\|\eta_i\|^2\right)^{t/2}.$$

Таким образом, в этом случае из (16) следует неравенство

$$E\left\|\sum_{i=1}^n\eta_i\right\|^t\leq C(B,t)\max\left\{\sum_{i=1}^n E\|\eta_i\|^t,\left(\sum_{i=1}^n E\|\eta_i\|^2\right)^{t/2}\right\}. \tag{17}$$

Пусть $m \geq 1$ – произвольное целое число и $\zeta_{Nm} = \sum\limits_{|k|\leq m} b_{kN}\eta_k$. Тогда, согласно (17),

$$E\|\zeta_{Nm}\|^t \leq C(B,t)\left(\sum_{|k|\leq m}\|b_{kN}\|^t\rho_{kt} + \left(\sum_{|k|\leq m}\|b_{kN}\|^2\rho_{k2}\right)^{t/2}\right).$$

Так как последовательность B - з.с.в. ζ_{Nm} с вероятностью 1 сходится к B - з.с.в. ζ_N, при $m \to \infty$, то в силу последнего неравенства, мы получим утверждение леммы 3.

3. Доказательство теоремы 2

Положим $X = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum\limits_{j=1}^{N} d\xi_j$ и $Y = \frac{e_0(\xi_{N+1}-\xi_1)}{\sqrt{N}} + \frac{\eta_1-\eta_{N+1}}{\sqrt{N}} + \frac{\zeta_{N+1}-\zeta_1}{\sqrt{N}}$. Тогда, согласно равенства (12), имеем

$$\frac{S_N}{\sqrt{N}} = X + Y.$$

Отсюда, применяя лемму 2, находим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\Delta_N(r,A) = &\left|P\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} d\xi_j \in A(r+\varepsilon,a)\right) - \mu_{0,dTd*}\left(A(r+\varepsilon,a)\right)\right| + \\ &+\left|P\left(\tfrac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} d\xi_j \in A(r-\varepsilon,a)\right) - \mu_{0,dTd*}\left(A(r-\varepsilon,a)\right)\right| + \\ &+P\left(\|Y\| \geq \varepsilon m_1\right) + 2m_2C_1(B,dTd^*,A)\left(1+\|a\|^\beta\right)\times \\ &\times\left(1+R^3(a,r)\right)^{-1}\varepsilon = J_1 + j_2 + J_3, \qquad (18)\end{aligned}$$

где

$$J_1 = \left|P\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} d\xi_j \in A(r\pm\varepsilon,a)\right) - \mu_{0,dTd*}\left(A(r\pm\varepsilon,a)\right)\right|,$$

$$J_2 = P\left(\|Y\| \geq \varepsilon m_1\right),$$

$$J_3 = 2m_2C_1(B,dTd^*,A)\left(1+\|a\|^\beta\right)\left(1+R^3(a,r)\right)^{-1}\varepsilon.$$

Очевидно, что $\{d\xi_j, j = 1,2,...,\}$ – независимые одинаково распределенные $B-$з.с.в. с ковариационными операторами dTd^*. Поэтому, в следствие1, оценивая псевдомоменты ν_3 через обычные моменты $E\|d\xi_1\|^3$, мы получим следующую оценку для J_1:

$$J_1 \le C(B,\beta_1)\left(1+\|a\|^{\beta_1}\right)\left(1+R^3(r\pm\varepsilon,a)\right)^{-1}\frac{1}{N^{1/6}}.$$

Оценим теперь величину $R(r\pm\varepsilon,a) = R(A(r\pm\varepsilon)+a) = \inf\limits_{x\in\partial(A(r\pm\varepsilon)+a)}\|x\|$. Пусть $z\in A\cup\partial(A)$ такой элемент, что $x = zr+a\in\partial(A(r,a))$, тогда $y = x\pm\varepsilon z\in\partial(A(r\pm\varepsilon,a))$. Отсюда следует равенство

$$y = x\pm\varepsilon z,\ z\in A\cup\partial(A). \tag{19}$$

Кроме того из определения $d_A(x)$ и из неравенства (5) следует, что

$$\|z\|\le m_2.$$

Теперь из (19) получим неравенство:

$$R(r\pm\varepsilon,a)\ge R(r,a)-\varepsilon m_2 = R(r,a)\left(1-\frac{m_2\varepsilon}{R(r,a)}\right)$$

Отсюда, если

$$\varepsilon\le\frac{R(r,a)}{2m_2}, \tag{20}$$

то

$$R(r\pm\varepsilon,a)\ge\frac{R(r,a)}{2}.$$

Таким образом

$$J_1 \le C(B,\beta_1)\left(1+\|a\|^{\beta_1}\right)\left(1+R^3(r,a)\right)^{-1}\frac{E\|\xi_1\|^3}{N^{1/6}}.$$

Теперь оценим

$$J_2 = P(\|Y\|\ge\varepsilon m_1 =$$
$$= P\left(\|e_0(\xi_{N+1}-\xi_1)+\eta_1-\eta_{N+1}+\zeta_{N+1}-\zeta_1\|\ge\varepsilon m_1\sqrt{N}\right).$$

Используя неравенства Маркова и $\|x+y+z\|^3\le 27\left(\|x\|^3+\|y\|^3+\|z\|^3\right)$, где $x,y,z\in B$, имеем

$$J_2\le\frac{27}{\varepsilon^3 m_1^3 N^{3/2}}\left(E\|e_0(\xi_{N+1}-\xi_1)\|^3+E\|\eta_1-\eta_{N+1}\|^3+E\|\zeta_{N+1}-\zeta_1\|^3\right)\le$$

$$\le\tfrac{C(B)}{\varepsilon^3 m_1^3 N^{3/2}}\left(\|e_0\|^3 E\|\xi_1\|^3+E\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j\xi_{1-j}\right\|^3+E\left\|\sum_{J=1}^{\infty}\gamma_j\xi_{N+1-j}\right\|^3+\right.$$
$$\left.+E\left\|\sum_{j=1}^{\infty}e_j\xi_{N+1+j}\right\|^3+E\left\|\sum_{j=1}^{\infty}e_j\xi_{j+1}\right\|\right),$$

где

$$e_j \sum_{k=j+1}^{\infty} d_{-k}, \gamma_j = \sum_{k=j}^{\infty} d_k.$$

Из леммы 3 (при $t = 3$), легко получить следующие неравенства:

$$E\left\|\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \xi_{1-j}\right\|^3 \le C(B)\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \|\gamma_j\|^3 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\gamma_j\|^2\right)^{3/2}\right\} E\|\xi_1\|^3 \le$$

$$\le C(B)\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\|d_k\|\right)^3 E\|\xi_1\|^3 \le C(B) g^3 E\|\xi_1\|^3,$$

$$E\left\|\sum_{j=1}^{\infty} e_j \xi_{N+1+j}\right\|^3 \le C(B)\left(\sum_{k=2}^{\infty} (k-1)\|d_{-k}\|\right)^3 E\|\xi_1\|^3 \le C(B) g^3 E\|\xi_1\|^3,$$

$$E\left\|\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \xi_{N+1-j}\right\|^3 \le C(B)\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\|d_k\|\right)^3 E\|\xi_1\|^3 \le C(B) g^3 E\|\xi_1\|^3,$$

$$E\left\|\sum_{j=1}^{\infty} e_j \xi_{j+1}\right\|^3 \le C(B)\left(\sum_{k=2}^{\infty} (k-1)\|d_{-k}\|\right)^3 E\|\xi_1\|^3 \le C(B) g^3 E\|\xi_1\|^3.$$

Из полученных неравенств, находим следующую оценку для J_2:

$$J_2 \le C(B)\frac{g^3 E\|\xi_1\|^3}{m_1^3 \varepsilon^3 N^{3/2^3}}.$$

Теперь, собирая оценки для J_2 и J_2, мы из (18) имеем

$$\Delta_N(r, A) \le C(B, \beta_1)\left(1 + \|a\|^{\beta_1}\right)\left(1 + R^3(r, a)\right)^{-1} E\|\xi_1\|^3 \frac{1}{N^{1/6}} +$$

$$+ C(B)\frac{g^3 E\|\xi_1\|^3}{m_1^3 \varepsilon^3 N^{3/2^3}} + C(B, dTd^*, A)\left(1 + \|a\|^{\beta_1}\right)\left(1 + R^3(r, a)\right)^{-1} m_2 \varepsilon.$$

Отсюда, выбирая $\varepsilon = \dfrac{g^{3/4}(E\|\xi_1\|)^{3/4}\left(1 + R^3(a, r)\right)^{1/4}}{m_1^{3/4} m_2^{1/4}\left(1 + \|a\|^{\beta_1}\right)^{1/4} N^{3/8}}$, получим

$$\Delta_N(r, A) = |F_N(A) - \mu_{0, dTd^*}(A)| \le C(B, d, T, \beta, A) \times$$

$$\times \max\left\{\frac{\left(1 + \|a\|^{\beta_1}\right)^{3/4} g^{3/4} E\|\xi_1\|^{3/4}}{(1 + R^3(r, a))^{3/4} m_1^{3/4} m_2^{1/4} N^{3/8}}; \frac{\left(1 + \|a\|^{\beta_1}\right) E\|\xi_1\|^3}{(1 + R^3(r, a)) N^{1/6}}\right\},$$

при этом, можно считать, что выполнено условие (20), так как в противном случае утверждение теоремы становится тривиальным.

Библиографический список

1. *Паулаускас В.И.* О сближении распределений двух сумм независимых случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве// Liet. matem. rink. – 1975. – Т.15. – №3. – С.177-200.

2. *Зупаров Т.М.* Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме для линейных процессов из R^k// Изв.АН УзССР, сер. физ. - мат наук. – 1984. – №4.

3. *Бярнотас В., Паулаускас В.И.* Неравномерные оценки в центральной предельной теореме в некоторых банаховых пространствах// Liet. matem. rink. – 1979. – Т.19. – №2. – С.23-43.

4. *Hofmann-Jorgenson J., Pisier G.* The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces// The Annals of Probab. – 1976. – Vol.4. – №4. –P.587-599.

5. *Паулаускас В.И.* О скорости сходимости некоторых функционалов от сумм независимых случайных величин в банаховом пространстве// Liet. matem. rink. – 1976. – Т.16. – №3. – С.103-121.

6. *Kuelbs J., Kurts T.* Berry-Essen estimates in Hilbert space and an application to the law of the iterated logarifm// The Annals of Probab. – 1974. – Vol.2. – №3. – P.387-407.

7. *Паулаускас В.И.* О скорости сходимости в центральной предельной теореме в некоторых банаховых пространствах// Теор.вероят. и ечҳ примен. – 1976. – Т.19. – №4. – С.775-791.

8. *Паулаускас В.И.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин в банаховых пространствах// Докторская диссертация. Вильнюс. – 1978.

9. *Бярнотас В.* О близости распределений двух сумм независимых случайных величин со значениями в некоторых пространствах Банаха// Liet. matem. rink. – 1978. – Т.18. – №4. – С.5-12.

10. *Паулаускас В.И.* Неравномерная оценка в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве// Liet. matem. rink. – 1975. – Т.15. – №4. – С.177-200.

11. *Paulauskas V.I.* Non-uniform estimate in the central limit theorem in the separable Hilbert space// Proc. of the Third Japan - USSR symp. on Probab., Lecture Notes in Mathem. – 1976. – Vol. 550.

12. *Denis'evskii N.A.* The central limit theorem for a linear process in Banach space// Theor. Probab. and Math. Statist. – 1990. – №40. – P.19-25.

13. *Зупаров Т.М., Зупаров Ш.Т.* О скорости сходимости в центральной предельной теореме для линейных процессов, порожденных слабо зависимыми случайными величинами// межвуз. сб. научн. тр. Статистические методы оценивания и проверки гипотез. – Пермь: Изд-во Пермского гос. университета, – 2011. – Вып. 23. – С.200-215.

14. *Зупаров Т.М., Зупаров Ш.Т.* Центральная предельная теорема для линейных процессов// Вестник Национального Университета Узбекистана – 2010. – №3. – С.79-86.

15. *Зупаров Т.М.,Зупаров Ш.Т.* О скорости сходимости в центральной предельной теореме для линейных процессов в гильбертовом пространстве// Труды конференции "Проблемы современной математики", посвященной 20 летию независимости Республики Узбекистан. Карши. – 2011. – С.133-134.

16. *В.М.Круглов.* Дополнительные главы теории вероятностей. - М.:Высш. шк. – 1984. – 264 с.

17. *И.Ф.Пинелис.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве // Матем. заметки. –1986. – Т.39. –№3. –С.438-443.

ON CONVERGENCE RATE IN CENTRAL LIMIT THEOREM FOR LINEAR PROCESSES WITH VALUES IN BANACH SPACE

T.M.Zuparov[1],

[1] National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, faculty of mechanics and mathematics, department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Uzbekistan, Tashkent.
(+99871)246-39-25; Uzbekistan, 100174, Tashkent, VUZ gorodok, National University of Uzbekistan, Dpt. "Probability Theory and Mathematical Statistics";

Abstract. *In paper the nonuniform estimate of order $O\left(N^{-1/6}\right)$ of convergence rate in central limit theorem for linear processes in separable real Banach space B with smoth norm on sets satistying some conditions ensuring of smotheness of bound is obtained.*

Key words: *central limit theorem, Banach space, linear process, covariance operator, Gaussian distribution, non-uniform estimate.*