ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ СУММ ЛИНЕЙНОГО ПРОЦЕССА, ПОРОЖДЕННОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ M-ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ

Сафаров О.А. Email: Safarov6100@scientifictext.ru

Сафаров Ойбек Абдикаюмович – ассистент,
кафедра информационных технологий и математики,
Ташкентский государственный аграрный университет,
г. Ташкент, Республика Узбекистан

Аннотация: *в работе доказана центральная предельная теорема для случайных сумм линейного процесса, порожденного последовательностью m-зависимых случайных. В работе рассмотрен случай, когда m может стремиться к бесконечности. Центральная предельная теорема для последовательности независимых одинаково распределенных с.в., доказанной Леви, была обобщена к случаю m-зависимых с.в. в работах Hoefding и Robbins, Diananda, Bergstrom и Зупаров и Чуянова. Кроме того, рассматриваются эксперименты, случайные события, математические ожидания, дисперсии, не связанные с центральной предельной теоремой, полученные в данной статье.*
Ключевые слова: *стационарная последовательность случайных величин, линейный процесс, центральная предельная теорема, m-зависимых случайных величин, случайных сумма.*

CENTRAL LIMIT THEOREM FOR RANDOM SUMS OF A LINEAR PROCESS GENERATED BY A SEQUENCE OF M-DEPENDENT RANDOM

Safarov O.A.

Safarov Oybek Abdikayumovich – Assistant,
DEPARTMENT OF INFORMATION TECHNOLOGY AND MATHEMATICS,
TASHKENT STATE AGRARIAN UNIVERSITY, TASHKENT, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *the paper proves the central limit theorem for random sums of a linear process generated by a sequence of m-dependent random ones. The paper considers the case when m can tend to infinity. The central limit theorem for a sequence of independent identically distributed r.v., proved by Levy, was generalized to the case of m-dependent r.v. in the works of Hoefding and Robbins, Diananda, Bergstrom and Zuparov and Chuyanov. In addition, experiments, random events, mathematical expectations, variances not related to the central limit theorem obtained in this article are considered.*
Keywords: *stationary sequence of random variables, linear process, central limit theorem, m-dependent random variables, random sum.*

УДК 551.466

1. Введение

Пусть $\{\xi_i, i \in Z\}$- стационарная в узком смысле последовательность случайных величин (с.в.). Будем предполагать, что величины ξ_i имеют нулевые средние и конечные дисперсии. Пусть далее $\{a_{iN}, i \in Z, N \geq 1\}$-последовательность чисел такая, что

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{in}^2 < \infty.$$

Последовательность с.в. $\{X_{kn}, 1 \le k \le n, n \ge 1\}$ называется линейным процессом, имеющим коэффициенты $\{a_{iN}, i \in Z, N \ge 1\}$ и порожденными случайными величинами $\{\xi_i, i \in Z\}$, если ряд $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{in}\xi_{k-i}$ сходится с вероятностью 1 и $X_k = X_{kn} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{in}\xi_{k-i}$

Положим

$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k B_n^2 = DS_n$, $F_n(x) = P(S_n < xB_n)$, $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du$,

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, n = 1, 2, \dots,$$

$\Delta_x(F_{n,}\Phi) = |F_n(x) - \Phi(x)|$, $\Delta(F_n, \Phi) = sup_x \Delta_x(F_n, \Phi)$,

Асимптотическая нормальность S_n/B_n и оценки скорости сходимост к нулю величин $\Delta_x(F_n, \Phi)$ и $\Delta(F_n, \Phi)$ когда $\{\xi_i, i \in Z\}$-слабозависимая последовательность с.в., изучена достаточно поробно (см., например обзорную статью). Можно перенести многие результаты, полученные в теории суммировании с.в. для линейных процессов, порожденных последовательностью m-зависимых с.в.

Последовательность с.в. $\{\xi_i, i \in Z\}$ называется m-зависимой, если любые два вектора вида $(\xi_{i1}, \dots, \xi_{ik})$ и $(\xi_{i_{k+j}}, \xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_k})$ независимы всякий раз. Когда j>m , где $-\infty \le i_1 < i_2 < \dots < i_k$; $i_k + j \le j_1 < j_2 < \dots < j_l \le \infty$ k и произвольные целые положительные числа.

Центральная предельная теорема для последовательности независимых одинаково распределенных с.в., доказанной Леви, была обобщена к случаю m-зависимых с.в. в работах Hoefding и Robbins [5], Diananda [4], Bergstrom [2] и Зупаров и Чуянова [6]. В работе [3] рассмотрен случай, когда m может стремиться к бесконечности.

В работе доказана центральная предельная теорема для случайных сумм линейного процесса, порожденного последовательностью m-зависимых с.в.

2. Основной результат

Классическая центральная предльная теорема для строго стационарной последовательности m-зависимых с.в. имеет следующий вид. Доказательство этого результата см. [5].

Теорема 1. *Пусть $\{\xi_i\}_{i\ge1}$ строго стационарная последовательность m-зависимых случайных величин. Пусть $E\xi_i = a$, 0< $D\xi_i = b^2 < \infty$. Тогда при n→ ∞*

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{\eta_n}{n} - a\right) \xrightarrow{d} N(0,1),$$

Где $\sigma^2 = b^2 + 2\sum_{i=2}^{m+1} Cov(\xi_1.\xi_i)$ и "$\xrightarrow{d} N(0,1)$" в распределении приводит к приближению к стандартному нормальному распределению.

В работе [8] Y. Shang обобщил теорему 1 для сумм случайного числа m-зависимых с.в. Центральная предельная теорема для случайных сумм линейного числа независимых с.в. были изучены в ранних работах Anscombe [1], Renyi [7], Blum, Hanson, Rosenblatt [3].

Теорема 2. *Пусть $\{\xi_i\}_{i\ge1}$ строго стационарная последовательность m-зависимых случайных величин, с $E\xi_i = a$, 0< $D\xi_i = b^2 < \infty$ и $\{X_k\}_{k\ge1}$ линейных процесс, порожденных последовательностью $\{\xi_i\}_{i\ge1}$ Пусть, далее $\{N_n\}_{n\ge1}$ последовательность положительных целозначых с.в. такая, что*

$$\frac{N_n}{\nu} \xrightarrow{p} \nu,$$

При n→ ∞, где $\{\nu_n\}_{n\ge1}$-произвольная последовательность, стремящаяся k +∞ и $\boldsymbol{\nu}$ *положительная константа. Если выполнены условия:*

(A1) Существуют $k_0 \ge 0$ и c>0 такие, что для любого $\lambda > 0$ и n>k_0

P($\max_{k_0<k_1\le k_2\le n}\left|\eta_{k_2} - \eta_{k_1} - (k_2 - k_1)a\right| \ge \lambda) \le c\,\frac{D(\eta_n - \eta_{k_0})}{\lambda^2}$,

(A2) $Cov(\xi_1, \xi_2) \geq 0$ *для i=2,3,…,m+1, тогда*

$$\frac{\sqrt{N_n}}{\sigma^2}\left(\frac{S_{N_n}}{N_n} - a\right) \xrightarrow{d} N(0,1),$$

При $n \to \infty$.

Список литературы / References

1. *Anscombe F.J.* (1952). Large-sample theory of sequential estimation, Proc. Cambridge Philos. Soc. V. 49. P. 600-607.
2. *Bregstrom H.* (1970). A comparison method for distribution functions of sums of Independent and dependent random variables, Theor.Probab.Appl. V. 15. P. 430-457.
3. *Blum I.K., Hanson D.I., Rosenblatt J.I.* (1063). On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables, Probability Theory and Related Fields. V. 1. P. 389-393.
4. *Diananda P.H.* (1955). The central limit theorem for m-dependent variables, Proc.Cambridge Philos.Soc. V. 51. P. 92-95.
5. *Hoeffding W., Robbins H.* (1948). The central limit theorem for dependent random variables, Duke Math. J. V. 15. P. 773-780.
6. *Зупаров Т.М., Чуянов Х.Ч.* (2011). Центральная предельная теорема для последовательностей m-зависимых случайных величин, Труды научной конференции “Проблемы современной математики” посвященной 20 летию независимости Республики Узбекистан. Карши. С. 133-134.
7. *Renyi A.* (1957). On the asymptotic distribution of the sum of a random numer of independent random variables, Acta.Math.Acad.Sci.Hung.V.8. P. 193-197.
8. *Shang Y.* (2012). A central limit theorem for randomly indexed m-dependent random variables, Filomat 26: 4 713-717. DOI 10, 2298/FIL.12047135.