О методе Стейна

Талат Маруфович Зупаров

Национальный университет Узбекистана

tm_zuparov@rambler.ru

$(\Omega,\mathcal{A},P)$ – вероятностное пространство, M – множество измеримых по Борелю функций (случайных величин с.в.) $\xi:\Omega\to\aleph$, где $\aleph$ – некоторое метрическое пространство. Известно, что каждая случайная величина со значениями в $\aleph$ порождает вероятностное пространство $(\aleph,\Re_{\aleph},P_{\xi})$, где $\Re_{\aleph}$ – $\sigma-$ алгебра борелевских множеств метрического пространства $\aleph$ и P_{ξ} – мера, порожденная с.в. ξ. Через $\Im-$ обозначим класс индикаторных функций I_A множества $A\in\Re_{\aleph}$. Тогда предельные теоремы теории вероятности можно охарактеризовать следующим образом: Требуется вычислить математическое ожидания $E\xi=\int\limits_{\aleph}\xi d(P_{\xi})$ для всех $\xi\in\mathrm{M}$, где M - некоторое семейство с.в. со значениями в пространстве $\aleph$, но P_{ξ} может иметь сложную структуру, такую, что точно вычислить его невозможно: например P_{ξ} может быть распределением суммы большого числа зависимых случайных величин.

Тогда естественно заменить P_{ξ} простой и хорошо известной вероятностной мерой P_{η} близкой к P_{ξ} такой, что математическое ожидание $E\eta=\int\limits_{\aleph}\eta d(P_{\eta}),\quad \forall\eta\in\mathrm{M}$ можно было бы легко вычислить и попробовать оценить аппроксимационную ошибку. Если аппроксимирующая мера нормальная или Пуассоновская, то говорят о нормальной или Пуассоновской аппроксимации. В данной статье рассматривается, в основном нормальная аппроксимация. Приведем примеры некоторых предельных теорем, которые можно получить из вышеприведенной схемы изложения.

Пусть $\aleph$ числовая прямая R, $\xi_1,\xi_2,\ldots$ последовательность с.в. $\mathrm{M}=\left\{I_{A_n};A_n=\{\xi_n\le x\},x\in R\right\}$, $\eta=N$, где $N-$ стандартная нормальная с.в. с функцией распределения $\Phi(x)$. Тогда

$$EI_{A_{\xi_n}}=P_{\xi_n}\left(I_{A_{\xi_n}}\right)=P\{\xi_n\le x\},\qquad EI_{A_{\eta}}=\Phi(x)$$

и если, при $n \to \infty$ ошибка аппроксимации $\square_n = \left| EI_{A_{\xi_n}} - EI_{A_\eta} \right|$ стремится к нулю, то последовательность $\{\xi_n\}$ подчиняется центральной предельной теореме. Если $\aleph = C_{[0,1]}$, $\mathsf{M} = \left\{ I_{A_n} : A_n = \left\{ \|\xi_n\| \le x \right\} \right\}$ и $\eta = W -$ стандартная Винеровская мера, и ошибка аппроксимации $P\left\{ \|\xi_n\| \le x \right\}$ интеграла через $P\left\{ \|W\| \le x \right\}$ при $n \to \infty$ стремится к нулю, то можно сказать, что последовательность с.в. $\{\xi_n\}$ со значениями в $C_{[0,1]}$ подчиняется принципу инвариантности (или центральной предельной теореме).

Если $\mathsf{M} = \left\{ I_{A_n}, A_n = \{\xi_n = x\}, x \in \aleph \right\}$,то мы получим локальную предельную теорему в пространстве $\aleph$.

Существуют различные методы доказательств предельных теорем: прямые вероятностные методы, аналитические методы (метод характеристических функций и др.), метод моментов, метод Стейна и др. В последние годы при доказательстве и исследовании остаточного члена в нормальной аппроксимации для зависимых величин наряду с известным методом Бернштейна (метод больших и малых блоков) появился ряд конкурирующих методов: метод Стейна, метод семиинвариантов и логарифмических производных, мартингаьные методы. Среди этих методов метод Стейна отличается своей универсальностью. Он применятся как в конечномерном, так и в бесконечномерном случае, в доказательстве нормальной и Пуассоновской аппроксимации. Его можно применять во многих случаях, когда предельная мера обладает критерием устойчивости.

Метод Стейна является попыткой построить такую аппроксимацию. Этот метод был впервые предложен и использован Ч.Стейном (1972) в случае нормальной аппроксимации. Chen, Barbour и другие (см.[1], [5], [9 – 11], [14], [16 - 17], [31], [35]) показали, что этот метод может быть приспособлен к аппроксимации для ряда других вероятностных распределений, в частности к Пуассоновским, обобщенным Пуассоновским и гамма распределениям.

Теперь мы кратко изложим метод Ч.Стейна. Пусть $(S, \Re(S), P)$ - вероятностное пространство и пусть $\aleph_0 \subset \aleph -$ как и раньше множество P интегрируемых функций. Выберем вероятностную меру P_0 на $(S, \Re(S))$ так, чтобы все $h \in \aleph_0$ являются P_0 интегрируемыми, и чтобы можно было легко вычислить все

интегралы $\int_S h dP_0$. Ищем множество функций F_0 и отображение $T_0 : F_0 \to \aleph$, так, чтобы для каждой $h \in \aleph_0$ уравнение

$$T_0 f = h - \int_S h dP_0 \qquad (1)$$

имело решение $f \in F_0$.

Тогда очевидно, что

$$\int_S (T_0 f) dP = \int_S h dP - \int_S h dP_0$$

T_0 называется ***оператором Стейна*** для распределения P_0; (1) называется ***уравнением Стейна*** и решение f уравнения (1) называется ***преобразованием Стейна*** для h. Нам нужно найти оператор Стейна так, чтобы можно было получить наилучшую оценку величины $\left| \int_S (T_0 f) dP \right|$.

Для того чтобы построить оператор Стейна T_0 для P_0, Стейном (1986) (см. [49]) предложено проделать следующие действия:

1) Выбрать вероятностное пространство $(\Omega, B(\Omega), Q)$ содержащее симметрично распределенную пару (X, Y) случайных величин (т.е. их общее распределение инвариантно относительно перестановки) с маргинальными распределениями P_0;

2) выбрать отображение $\alpha : F_0 \to F$, где $F -$ пространство несимметрических функций и $\mu : S^2 \to R$ такое, что $M\left(|\mu(X,Y)|\right) < \infty$;

3) Положить $T_0 = T \circ \alpha$, где $T : F \to \aleph$ определяется с помощью условного математического ожидания имеющий вид:

$$(T\mu)(x) = M\left(\mu(X,Y) \middle| X = x\right), \forall x \in S.$$

Тогда легко видеть, что

$$\int_S (T_0 f) dP_0 = \int_S (T\mu) dP_0 = M\left(\mu(X,Y)\right), \forall f \in F_0,$$

где $\mu = \alpha f$. Следовательно, в силу нечетности μ

$$\int_S (T_0 f)\, dP_0 = 0, \quad \forall f \in F_0 \qquad (2)$$

что является необходимым условием для оператора Стейна. Соотношение (2) называется ***тождеством Стейна*** для распределения P_0.

Другой способ построения оператора Стейна T_0 был предложен Chen(ом) (1998) (см. [22]) . Пусть $F_0 \subset L^2(S, P_0)$. Выберем линейное отображение

$A: F_0 \to L^2(S, P_0)$ так, чтобы неслучайная функция 1 на S принадлежала области A^* – сопряженного оператора. Тогда

$$\int_S (Af)\, dP_0 = \int_S (A^* 1)\, f dP_0, \quad \forall f \in F_0,$$

Полагая $T_0 = A - (A^* f) I$, мы имеем

$$\int_S (T_0 f)\, dP_0 = \int_S (Af) dP_0 - \int_S (A^* 1)\, f dP_0, \quad \forall f \in F_0.$$

Таким образом, соотношение (2) справедливо и в этом случае.

Ниже мы уточним вышеприведенные понятия в конкретном случае нормальной аппроксимации.

В 1972 году Стейн (см.[48]) предложил новый обшей метод для оценки скорости сходимости распределения суммы слабо зависимых с.в. к стандартному нормальному распределению. Его подход впоследствии был расширен Chen (1975) для Пуассоновской аппроксимации. Обший метод был предложен Стейном (1986) (см. [49]), который применим как для нормальной, так и для Пуассоновской аппроксимации. Дальнейшее обобщение метода Стейна для нормальной аппроксимации приведено в работе [45] Rinott and Rotar (2000).

В этой статье мы основное внимание уделяем применению этого метода для нормальной аппроксимации в зависимом случае.

Всестороннее представление Пуассоновской аппроксимации изучено в работе [14] (см.Barbour, Holst and Jansen 1992). Дальнейшие усовершенствование метода Стейна к биномиальному и полиномиальному распределению получено различными авторами (см Luk, 1994, [35] , Diaconis, 2004, [30]).

Метод Стейна можно легко обобщить к многомерным и функциональным пространствам. Так, например Пуассоновскую аппроксимацию можно расширить к Пуассоновским процессам (см. Barbour A.D., Holst L. и Janson S. 1992, [14] и Barbour A.D. и Xia A. 2000, [17]) и к многомерным нормальным, а также к Броуновским аппроксимациям (см. Goetze F. 1991, [32] и Barbour 1990, [7]). Дальнейшее обобщение к измеримым процессам было предпринято в статье [39] . Метод Стейна также можно обобщить и к стохастическим процессам и получить достаточно хорошую оценку скорости сходимости (см. Barbour 1986, [6], рассмотреть разложение Эджеворта (Edgeworth expansions) для сумм независимых случайных величин. Schneller (1989), [47] получил разложение Эджеворта для линейных ранговых статистик первого и второго порядка. В случае Пуассоновской аппроксимации различными авторами также были рассмотрены сложная Пуассоновская аппроксимация (см. Barbour, Chen и Loh, 1992, [9]), сложный Пуассоновский процесс (см. Barbour и Mansson , 2002, [16]), а также аппроксимация через Пуассоновской меры со знаком (см. Barbour и Cekanavicius, 2002, [8]).

Замечательной характерной чертой метода Стейна является то, что его можно успешно применить во многих случаях, где зависимость играет важную роль. Стейн (см. Stein 1986, [49]), обсуждает применение полученного общего результата к латинским прямоугольникам, к элементам бинарного разложения целых чисел и к изолированным вершинам случайных графов. Много различных применений к самим случайным графам изучены в работе Barbour , Karonski и Rucinski, 1989, [15]. Ниже мы более подробно остановимся на некоторых результатах в зависимой схеме. Как уже было сказано, метод Стейна можно применить к линейным ранговым статистикам (см. Bolthausen ,1984, [18]; Shneller, 1989, [47]; Barbour A.D., Holst и Janson S, 1992, [14]; Bolthausen и Gotze, 1993,[19]; и Goldstein и Reinert, 1997, [33]). Другие области применений включают в себя изучение последовательности зависимых бросаний монеты и последовательность состязаний (см. Arratia ,Gordon и Waterman 1990, [2]),

сумму функционалов коррелированных Гауссовских с.в. или сумму компонентов многомерных случайных векторов (см. Dembo, Rinott, 1996, [27]), матричную корреляционную статистику (см. Barbour и Eagleson 1986, [13]), теорию оптимальных величин (см.Smith, 1989, [48]), диссоциативную статистику (см. Barbour и Eagleson 1985 , [12]), различные схемы серий (см. Chryssaphinon и Papastavridis, 1988, [26]), случайные поля (см. H.Takahata , 1993, [50]) статистику спейсингов (см. Glaz , Naus , Roos и Wallenstein, 1994, [31]; и . Dembo, Rinott 1996, [27]), некоторые классы $U-$ статистик (см. Rinott и Rotar V. 1997, [44] и Shorack, 1992, [51]), случайные блуждания (см. Raic, 2003, [38]) и многое другое.

С методом Стейна нормальной и Пуассоновской аппроксимации можно ознакомится в многочисленных обзорных статьях и презентациях (см. [1], [10 -11], [14], [24 -25], [29 - 30], [36 – 37], [40 - 41] и др.).

В работе [38] изложен новый подход к методу Стейна нормальной аппроксимации. Здесь мы приведем основной результат этой работы и некоторые применения этого результата.

Дана с.в. W которая является произвольной функцией от некоторого семейства необязательно независимых с.в., удовлетворяющая условию $EW = 0, \quad EW^2 = 1.$ Мы опишем метод построения другой с.в. T, такой, что для всех гладких функций φ имеет место соотношение

$$E(\varphi(X)W) \approx E(\varphi'(W)T).$$

В частности, взяв в качестве φ тождественную функцию $\varphi(x) = x$ мы получим, что $ET \approx 1$. Если теперь DT достаточна мала, тогда с.в. T мы можем заменить константой ET и получить соотношение
$$E(\varphi(W)W) \approx E\varphi'(W)$$

которое показывает, что распределение W предельно Гауссовское. Таким образом, решение задачи нормальной аппроксимации сводится к проблеме оценки дисперсии T. В работе [38] указана структура такой с.в. и сформулирован следующий основной результат и некоторые его применения. Для изложения этого результата нам потребуется некоторые обозначения.

Пусть $\aleph$ измеримое пространство и $X=(X_1,...,X_n)$ вектор независимых $\aleph-$ з.с.в. Пусть $X'=(X'_1,...,X'_n)$ независимые копии X. Положим $[n]=[1,2,...,n]$ и для каждого $A\subset[n]$ определим случайный вектор

$X_i^A=\begin{cases} X'_i, \text{ если } \mathrm{i}\in \mathrm{A}, \\ X_i, \text{ если } i\notin A. \end{cases}$ Когда A является множеством с единственном элементом $\{j\}$, то мы будем просто писать X^j вместо $X^{\{j\}}$. Пусть $f:\aleph\to R$ измеримая функция. Мы определим случайное приращение $f(X)$ по $j-$ той координатой как

$$\Delta_j f(X)=f(X)-f(X^j).$$

Заметим, что $\Delta_j f(X)$ зависит не только от вектора X, но также и от X'_j. Теперь для каждого $A\subseteq[n]$ положим

$$T_A=\sum_{j\notin A}\Delta_j f(X)\Delta_j f(X^A) \quad \text{и} \quad T=\frac{1}{2}\sum_{A\subseteq[n]}\frac{T_A}{C_n^{|A|}\left(n-|A|\right)} .$$

Теорема 1 . Пусть $W=f(X)$. Предположим, что $EW=0$ и $\sigma^2=EW^2<\infty$. Тогда $ET=\sigma^2$ и

$$\delta_W\le\frac{\left[D\left(E\left(T|W\right)\right)\right]^{1/2}}{\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^3}\sum_{j=1}^{n}E\left|\Delta_j f(X)\right|^3,$$

где δ_W- расстояние Канторовича – Вассерштейна.

Приведем один из многочисленных применений основной теоремы в случае нормальной аппроксимации распределения сумм независимых с.в. Пусть $X_1,...,X_n$ независимые одинаково распределенные с.в. с $EX_i=0;\quad EX_i^2=1$ и $W=f(X)=n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}X_i$. Тогда, для любого $A\subseteq[n]$ и $j\notin A$,

$$\Delta_j f(X^A)=n^{-1/2}(X_j-X'_j).$$

Таким образом, $T_A=n^{-1}\sum_{j\notin A}(X_j-X'_j)^2$. Теперь, несложные вычисления показывают, что

$$T = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - X'_j)^2.$$

Теперь предполагая, что $EX_i^4 < \infty$ и используя неравенство $D\left(E\left(T|W\right)\right) \le DT$, мы получим следующий результат.

Следствие 1. Пусть $X_1,...,X_n$ независимые одинаково распределенные с.в. удовлетворяющие условиям $EX_i = 0;\quad EX_i^2 = 1$ и $EX_i^4 < \infty$. Тогда существует константа C, зависящая только от распределения X_i, такая, что

$$\delta_W \le Cn^{-1/2} \ .$$

Аналогично, применяя основную теорему, можно доказать почти все известные классические результаты относящиеся к суммировании независимых с.в. В работе [23] , используя другую общую оценку для δ_W доказанную в этой статье, была получена теорема Линдеберга и оценка Берри - Эссена для остаточного члена в ц.п.т.

1.Квадратические формы. Предположим, что $X_1,...,X_n -$ независимые одинаково распределенные с.в. со средним 0, единичной дисперсией и конечным моментом четвертого порядка. Пусть $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ вещественная симметрическая матрица. Мы рассмотрим следующую задачу: при каких условиях на матрицу A можно утверждать, что квадратическая форма к $W = \sum_{1\le i\le j} a_{ij}X_iX_j$ асимптотически нормальна?

Ответ на этот вопрос не очень простой: например, обычные методы, применяемые для $U-$ статистик, не работают для этой задачи. Наилучшим из известных условий в литературе (см. Rotar 1973, [46], Hall 1984, [33] , De Jong 1987, [28]) утверждает, что асимптотически нормальность справедлива, если имеется последовательность симметрических матриц A_n, удовлетворяющих условию:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n^{-4}Tr\left(A_n^4\right) = 0 \ \text{ и } \ \lim_{n\to\infty}\sigma_n^{-2}\max_i\sum_{j=1}^{n}a_{n,ij}^2 = 0 \quad ()$$

где $\sigma_n^2 = \frac{1}{2}Tr\left(A_n^2\right) = DW_n$. Может показаться, что первое условие необычное, однако оно эквивалентно

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E\left(W_n - EW_n\right)^4}{\left(DW_n\right)^2} = 3,$$

которое является необходимым условием для сходимости к нормальному распределению, если последовательность $\left\{W_n^4\right\}_{n\geq 1}$ равномерно интегрируем.

Используя основную теорему, в работе [38] доказана теорема, обобщающая вышеприведенное утверждение. Для иллюстрации мы здесь сформулируем более упрощенный вариант этого результата.

Следствие 2. Пусть вектор $X = (X_1,...,X_n)$ компоненты, которой являются независимыми одинаково распределенными с.в. с $P(X_i = 1) = P(X_i = 1) = 1/2$ и $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ вещественная симметрическая матрица. Пусть $W = \sum_{1\leq i\leq j} a_{ij}X_iX_j$ и $\sigma^2 = DW = \frac{1}{2}Tr\left(A^2\right)$. Тогда

$$\delta_W \leq \left(\frac{Tr(A^4)}{2\sigma^4}\right)^{1/2} + \frac{5}{2\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{3/2}.$$

Прежде чем перейти к изложению некоторых результатов, полученных методом Стейна для зависимых структур, мы отметим следующее.

Замечание. Все работы кроме [55], посвященные методу Стейна не используют характеристические функции. Это не случайно, поскольку результаты, полученные этим методом не потребуют независимость участвующих в них случайных величин, и поэтому метод характеристических функций здесь не работает. Следовательно, перенесение метода Стейна на язык характеристических функций, как это было сделана в работе [55] , в случае зависимых структур бесполезно. Кроме того, в работе [55] метод Стейна назван методом Стейна – Тихомирова, что не верно. Тем более сам Тихомиров считает, цитируем (см. [54]) «настоящая работа в значительной степени написана под влиянием статьи Стейна (1972). Заметим, однако, что в отличие от Стейна мы используем аппарат характеристических функций, тогда как Стейн вообще подвергал сомнению пользу этого аппарата при

исследовании скорости убывания для слабо зависимых величин». Таким образом, сам автор не утверждает, что эти результаты получены методом Стейна.

2. Метод Стейна для нормальной аппроксимации распределения суммы локально зависимых случайных величин

Последовательность $m-$ зависимых с.в. $\{\xi_i, i \in Z\}$ имеет свойство: для любого $i \in Z$ с.в. $\{\xi_j, j \le i\}$ и $\{\xi_j, j > i+m\}$ независимы. В частности $0-$ зависимые с.в. являются независимыми и наоборот. Локально зависимые с.в. являются обобщением $m-$ зависимых с.в. в случае, когда множество индексов являются произвольным. Пусть J множество объема n и $\{\xi_i, i \in J\}$ случайные величины с нулевыми средними и конечными дисперсиями $W = \sum_{i \in J} \xi_i$ и $DW = 1$. Пусть $A \subseteq J$ и через ξ_A обозначим множество $\sum_{j \in A} \xi_j$. Тогда $A^c = \{ j \in J; j \overline{\in} A\}$ и через $|A|$ обозначим мощность множества A. Теперь мы введем следующие определения локальной зависимости:

1 – локальная зависимость (1.ЛЗ): для любого $i \in J$ существует $A_i \subset J$ такая, что случайные величины ξ_i и $\xi_{A_i^c}$ являются независимые.

2 – локальная зависимость (2.ЛЗ): для любого $i \in J$ существуют $A_i \subset B_i \subset J$ такие, что случайные величины ξ_i являются независимыми от $\xi_{A_i^c}$ и ξ_{A_i} независим от $\xi_{B_i^c}$.

3 - локальная зависимость (3.ЛЗ): для любого $i \in J$ существуют $A_i \subset B_i \subset C_i \subset J$ такие, что случайные величины ξ_i являются независимыми от $\xi_{A_i^c}$, ξ_{A_i} независим от $\xi_{B_i^c}$ и , в свою очередь ξ_{B_i} независим от $\xi_{C_i^c}$.

Легко заметить, что справедливы следующие соотношения $(3.ЛЗ) \Rightarrow (2.ЛЗ) \Rightarrow (1ЛЗ)$. Поэтому, самым слабым из этих зависимостей является 1.ЛЗ. Следует отметить, что многие зависимые объекты, изучаемые в теории вероятностей являются локально зависимыми. К ним относятся $m-$ зависимые случайные величины и поля, случайные графы с изолированными вершинами и др.

Мы теперь приведем общую равномерную оценку типа Берри - Эссена для W, установленную, с помощью метода Стейна, в случае выполнения (2.ЛЗ). Доказательство этой и других аналогичных теорем в зависимой схеме можно найти например, в работах [3 -5], [20 - 22], [24], [30], [39], [42 -43].

Теорема 2. Пусть $N(B_i) = \left\{ j \in J : B_j \bigcap B_i \neq \varnothing \right\}$ и $2 < p \leq 4$. Пусть выполнено условие (2.ЛЗ) и $\left| N(B_i) \right| \leq k$. Тогда

$$\sup_z \left| P\left(W \leq z\right) - \Phi(z) \right| \leq (13 + 11k) \sum_{i \in J} \left(E\left|\xi_i\right|^{3 \wedge p} + E\left|Y_i\right|^{3/p} \right)$$

$$+2,5 \left(k \sum_{i \in J} \left(E\left|\xi_i\right|^p + E\left|Y_i\right|^p \right) \right)^{1/2},$$

где $Y_i \sum_{j \in A_i} \xi_j$. В частности, если $E\left|\xi_i\right|^p + E\left|Y_i\right|^p \leq \theta^p$ для некоторого $\theta > 0$ и для каждого $i \in J$, то

$$\sup_z \left| P\left(W \leq z\right) - \Phi(z) \right| \leq (13 + 11k) n \theta^{3 \wedge p} + 2,5 \theta^{p/2} \sqrt{kn},$$

где $n = \left| J \right|$.

3. Оценки остатка в нормальной аппроксимации для распределения суммы слабо зависимых с.в.

Пусть $\{X_k, k \in Z\}-$ последовательность центрированных с.в. с $\sigma_k^2 = MX_k^2$.

Функцию распределения с.в. $W_n = (X_1 + ... + X_n) / B_n$, где $B_n^2 = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2$,

обозначим через $F_n(x)$. Исследуем асимптотическое поведение (при $n \to \infty$) величины $R_n = \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)|$. С начало мы введем различные типы слабой зависимости. Через M_a^b мы обозначим $\sigma-$алгебру событий, порожденную случайными величинами $X_a, X_{a+1}, ..., X_b$. Мы используем следующие условия слабой зависимости:

а) условию сильного перемешивания (с.п.): при $n \to \infty$

$$\alpha(n) = \sup |P(AB) - P(A)P(B)| \to 0,$$

где верхняя грань берется по всем $A \in M_{-\infty}^k, B \in M_{k+n}^{\infty}$;

в) условию полной регулярности (п.р.): при $n \to \infty$

$$\rho(n) = \sup \frac{|E\xi\eta - E\xi E\eta|}{\sqrt{E(\xi - E\xi)^2 E(\eta - E\eta)^2}} \to 0,$$

где верхняя грань берется по всем случайным величинам ξ, η, измеримым относительно $\sigma-$алгебр $M_{-\infty}^k, M_{k+n}^{\infty}$ соответственно и имеющим конечный второй момент;

с) условию равномерного сильного перемешивания (р.с.п.): при $n \to \infty$

$$\varphi(n) = \sup \left| \frac{P(AB) - P(A)P(B)}{P(A)} \right| \to 0,$$

где верхняя грань берется по всем $A \in M_{-\infty}^k, B \in M_{k+n}^{\infty}$.

Оценкам остаточного члена в ц.п.т. для сумм слабо зависимых с.в. посвящено много работ. Обзор и формулировку результатов, полученных в последние годы можно найти в статье [53].

В работе [54] в случае экспоненциального убывания $\alpha(n)$ Тихомировым получен следующий результат.

Теорема 3. Пусть $\{X_k, k \in Z\}-$ стационарная в узком смысле последовательность с.в. Предположим, что существуют такие постоянные $K > 0, \beta > 0,$ что для всех n выполнено неравенство

$$\alpha(n) \le Ke^{-\beta n}$$

и для некоторого $\delta, 0 < \delta \le 1,$

$$E|X_1|^{2+\delta} < \infty.$$

Тогда найдется такое $A,$ зависящее только от $K, \beta, \delta,$ что

$$R_n \le An^{-\delta/2} \lg^{2+\delta} n.$$

Если вместо экспоненциального убывания коэффициента с.п. $\alpha(n)$ потребовать экспоненциально быстрое убывание коэффициента п.р. $\rho(n)$, то можно понизить степень логарифма в оценке R_n.

Используя основную теорему основополагающей работы Стейна (см. [48]), в статье Зупарова [52] получены оценки величины R_n для всех вышеприведенных типов слабой зависимости. Для обозрения полученных в [52] результатов мы здесь приведем только одну из них.

Теорема 4. Пусть последовательность с.в. $\{X_k, k \in Z\}$ удовлетворяет условию с.п. с $\alpha(n) = e^{-\lambda n}$, где величина $\lambda > 0$ постоянная. Если, кроме того, $M|X_k|^{8+\delta} < \infty, 0 < \delta \le 1,$ и выполнены условия

$$\max\left(\sum_{k\in J} EX_k^8, \sum_{k\in J}\left(EX_k^8\right)^{1/8}\right) \le C_1 E\left(\sum_{k\in X} X_k\right)^2$$

равномерно по $J \subseteq [n]$, и

$\sigma^2 = \sup_k DX_k \le C_2 \ln B_n$, где C_1 и C_2 некоторые постоянные, тогда найдется положительное постоянное C, такое, что

$$R_n \le C\frac{\ln B_n}{B_n}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Arratia R., Goldstein L and Gordon L. (1990): Poisson approximation and the Chen – Stein method. Stat.Science, 5, 403 – 434.

2. Arratia R.,Gordon L. and Waterman L.S. (1990): The Erdos – Renyi law in distribution, for coin tossing and sequence matching. Stat.Science, 5, 403 – 434.

3. Baldi, Rinott (1989). On normal approkximation distributions in terms of dependency graph. Ann. Probab, 17, p. 1646 – 1650.

4. Baldi, Rinott, Steyin (1989). A normal approksimation for the number of lokal maksima of random functions on a graph. In : Probability, statistics and mathematics. Papers in honor of Samuel Kurlin, Eds: T.W.Anderson, K.B.Athreya, D.L.Iglehart, pp. 59 -81, Academik Press, Boston.

5. Barbour A.D. (1982): Poisson convergence and random graphs. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc, 92, 349 -359.

6. Barbour A.D. (1986): Asymptotic exspansions bazed on smooth test functions in the central limit theorem, Probab. Theory Related Fields, 72, 289 – 303.

7. Barbour A.D. (1990): Stein`s method for diffusion approximations, Probab. Theory Related Fields, 84, 297 – 322.

8. Barbour A.D. and Cekanavicius V. (2002): Total variation asymptotics for sums of independent integer random variables, Ann.Probab., 30 , 509 -545.

9. Barbour A.D., Chen L.H.Y. and Loh W. – L. (1992): Compound Poisson approximation for non-negative random variables via Stein`s method, Ann. Probab., 20, 1843 – 1866.

10. Barbour A.D. and Chen L.H.Y. (eds) (2005): An introduction to Stein`s method. Lecture Notes Series 4, Inst. Math. Sciences, World Scientific Press, Singapore.

11. Barbour A.D. and Chen L.H.Y. (eds) (2005): Stein`s method and applications, Lecture Notes Series 4, Inst. Math. Sciences, World Scientific Press, Singapore.

12. Barbour A.D. and Eagleson G.K. (1985): Multiple comparisons and sums of dissociated random variables. Adv.Appl. Probab., 17, 147 – 162.

13. Barbour A.D. and Eagleson G.K. (1986): Random association of symmetric arrays. Stoch. Analysis Appl. 4, 239 – 281.

14. Barbour A.D., Holst L. and Janson S. (1992): Poisson Approximation. Oxford Clarendon Press.

15. Barbour A.D., Karonski M. and Rucinski A. (1989): A central limit theorem for decomposable random variables with applications to random graphs. J.Combin. Theory Ser. B.47, 125 – 145.

16. Barbour A.D. and Mansson M. (2002) Compound Poisson process approximation, Ann. Probab., 30, 1492 – 1537.

17. Barbour A.D. and Xia A. (2000): Estimating Stein`s constants for compound Poisson approximation, Bernoulli, 6, 581- 590.

18. Bolthausen E. (1984): An estimate of the remainder in a combinatorial central limit theorem, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete., 66, 379 -386.

19. Bolthausen E. and Gotze F. (1993): The rate of convergence for multivariate sampling statistics. Ann. Statist. 2, 1692 – 1710.

20. Chen L.H.Y. (1975): Poisson approximation for dependent trials. Ann. Probab., 3, 534 -545.

21. Chen L.H.Y. (1978): The central limit problems for dependent random variables, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete., 43,223 – 243.

22. Chen L.H.Y. (1998): The rate of convergence in a central limit theorem for dependent random variables with arbitrary index set, IMA. Preprent Series N.243, Univ. Minnesota.

23. Chen L.H.Y. and Shao Q –M. (2001): A non – uniform Berry – Esseen bound via Stein`s method, Probab. Theory Related Fields., 120, 236 -254.

24. Chen L.H.Y. and Shao Q –M. (2004): Normal approximation under lokal dependence. Ann. Probab., 32,1985 – 2028.

25. S.Chatterjee. A new method of normal approximations. . Ann.Probab, 2008, v.36, No.4, p. 1584 – 1610.

26. Chryssaphinon O. and Papastavridis S. (1988): A limit theorem for the number of no – overlapping occurences of a pattern in a sequence of independent trials. J. Appl. Probab., 25, 428- 431.

27. Dembo, Rinott (1996): Some examples of normal approximations by Steyin`s method. In: Random Diskrete Structures, Eds: D.Aldous, R. Pemantle, pp. 25 – 44. Springer,New – York.

28.1. De Jong P. (1987): A CLT for generalized quadratic forms. Probab. Theory Related Fields 75, 261 – 277.

29. Diaconis P. and Holmes S. (2004): Stein`s method, Expository Lectures and Applications Institute of Math.Statist., Hauward,CA.

30. P.Diaconis (2004), Stein`s method for Markov chains: first examples, Lecture Notes – Monograf Series, vol 46, p. 26 – 40.

31.Glaz J., Naus J., Roos M. and Wallenstein S. (1994): Poisson approximations for distribution and moments of ordered $m-$ spacing's, . J. Appl. Probab., 31, 271 -281.

32. Goetze F. (1991): On the rate of convergence in the multivariate CLT, Ann. Probab. 19, 724 -739 MR1106283.

33. L.Goldstein,,G.Reinert. Steins method and the zero bias transformation with application to simple random sampling. Ann.Probab, 1997, v. 7, No.4, p. 935 –952.

34. Hall P. (1984): CLT for integrated square error of multivariate nonparametric density estimators, Multivariate Anal. 14, 1 -16.

35. Luk M. (1994): Stein`s method for the gamma distribution and related statistical applications, Ph. D. Thesis. Univ. Southern California.

36. Nourdin L. (2009): Integration by parts on Wiener space and applications. Preprint.

37. Peccati G. (2009): Stein`s method Malliavin calculus and infinite – dimensional Gaussian analysis. Preprint.

38. Raic M. (2003): Normal approximation by Stein's method. Proceedings of the seventh young statist.meetingAndreey Mrval (Editor). Method.zvezki, 21, Ljubljana: FDV, p. 71-97.

39. Reinert G. (1995): A weak law of large numbers for empirical measures via Stein`s Method. Ann. Probab., 23, 334 – 354.

40. Reinert G. (1997): Couplings for normal approximations with Stein`s method, To Appear in Conference Proceedings. Microsurveus in Discrete probability.

41. Reinert G. (1998): Couplings for normal approximations with Stein`s method in microsurveys in discrete probability. D. Aldous, J. Propp eds., Dimacs series.

42.Rinott Y. (1994): On normal approximation rates for certain sums of dependent random variables. J. Appl. Comp Math.,55, 135 -143.

43. Rinott Y. and Rotar V. (1996): A multivariate CLT for local dependence with $n^{-1/2}\log n$ rate and applications to multivariate graph related statistics, J. Multivariate Anal., 56, 333 – 350.

44. Rinott Y. and Rotar V. (1997): On coupling constructions and rates I the CLT for dependent summands with applications to the antivoter model and weighted $U-$ statistics, Ann. Appl. Probab., 7, 1080 -1105.

45. Rinott Y. and Rotar V. (2000): Normal approximations by Stein`s method. Decisions in economics and finance, 23, 15 – 29.

46. Rotar V.I. (1973) Some limit theorems for polynomials of second degree, Theory Probab.Appl. ,18, 499 – 507, MR0326803.

47. Shneller W. (1989): Edgoworth expansions' for linear rank statistics. Ann. Statist., 17, 1103 -1123.65. Smith R.L. (1989): Extreme value theory for dependent sequences via the Stein – Chen method for Poisson approximation. Stoch. Proc. Appl., 30, 317 -327.

48. C.Stein. A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. Proc. Of the Sixth. Berkeley Symp. Math. Statist. Probab. , 1972, p.583 – 602.

49. C.Stein (1986). Approximate Computation of Expectations. IMS Lecture Notes – Monograph Series 7. IMS, Hayward, CA. MR0882007.

50. H.Takahata. On the rates in the central limit theorem for weakly dependent random fields. Z. Wahrsch.Verw.Gebietl, 1993, v.64, p..445 – 456. .

51. Shorack G.R. On Stein`s approach to the CLT, Technical report N339, Novomder 1992, Department of Statistics, Box 354322.

52. Зупаров Т.М. Моментные неравенства и оценки остаточного члена в центральной предельной теореме для последовательностей слабо зависимых случайных величин. Предельные теоремы для случайных процессов и стат. иыводы., Ташкент, 1981, Изд-во Фан, с. 69 – 87.

53. Зупаров Т.М. Центральная предельная теорема и принцип инвариантности для последовательностей случайных величин с перемешиванием, Материалы респуб. Научно-практической конференции «Статистика и ее применения», Ташкент, 2013, с. 133 -141.

54. Тихомиров А.Н. (1980): О скорости сходимости в ц.п.т. для слабо зависимых случайных величин, Теория вероятн. и ее применения., 25, №4, 800 – 818.

55. Фармонов Ш.К. (2007): О методе Стейна – Тихомирова и его приложениях в неклассических предельных теоремах, Дискретная математика, 19 вып. 1, 27 – 39.